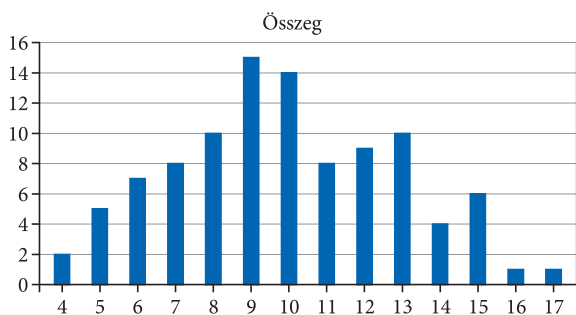


## BEVEZETŐ

Egy társasjátékban Zsóka három kockával dobhat, és a dobások összege számít. Négypontonként kaphat egy téglát. (Akkor kap például 2 téglát, ha a dobások összege 8, 9, 10 vagy 11.) Vajon hány téglára számíthat?

Zsóka egy számítógépes programot írt, amely 100 véletlen kockadobást végzett el három kockával. Az egyik számítógépes kísérlet eredményét ábrázolja az oszlopdiagram.

Ebben a kísérletben a 100 dobás módusza a 9 lett. A dobások átlaga 10,55 volt.



Ahogy egyre több dobást végzünk el, az átlag egy jól meghatározott érték körül ingadozik. Ezt az értéket nevezzük várható értéknek. A várható érték kiszámítása az egyes kimenetek valószínűségén alapszik. Három kockával dobva a dobások összegének várható értéke 10,5 lesz, amit a fenti átlag jól közelít. Érdekesség, hogy soha sem fogunk 10,5-et dobni, hiszen a dobások összege biztosan egész szám. A várható érték a dobások átlagát jellemzi.

## ELMÉLET

## 1. Összetartozó fogalmak a statisztikában és a valószínűségszámításban

Nagyszámú véletlen kísérlet esetén a statisztika és a valószínűségszámítás fogalmai szoros kapcsolatban állnak egymással.

Összetartozó fogalmak:

statisztika		valószínűségszámítás
relatív gyakoriság	↔	valószínűség
átlag, súlyozott átlag	↔	várható érték

## 2. Várható érték

A várható érték csak olyan esetben értelmezhető, amikor a kísérlet kimenetelét egy valós számmal adjuk meg (pl. pontok összege, osztályzatok, pontok vagy golyók száma, hibás elemek száma). Arról ad információt, hogy nagyszámú kísérlet esetén átlagosan milyen eredményt fogunk elérni. Nem azonos a legvalószínűbb eredménnyel.

Ha nagyszámú kísérletet végzünk, akkor a kísérletek kimenetelének átlaga egy jól meghatározható érték közelében lesz. Ez az érték a lehetséges kimenetek valószínűségéből számolható, és várható értéknek nevezzük.

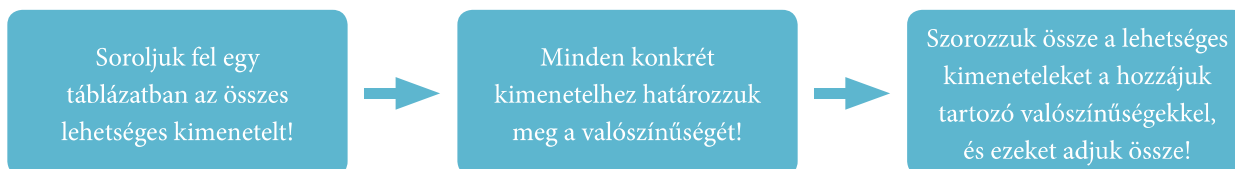
Várható érték = a lehetséges kimeneteknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga.

A várható érték jele:  $E$  (de elterjedt az  $M$  jelölés is).

*Például:*

Ha 100 sorsjegy van, köztük 95 nem nyer, 5 pedig 1000 Ft nyereményt jelent, akkor egyetlen sorsjegy esetén 95% az esély, hogy nem nyerünk. Ha azonban sokszor játszunk, akkor időnként lesz egy-egy 1000 Ft-os nyereményünk, ezért a nyeremények átlaga nem lesz 0. Mivel 0,95 valószínűséggel 0 a nyeremény és 0,05 valószínűséggel 1000 Ft, a nyeremény várható értéke  $0,95 \cdot 0 + 0,05 \cdot 1000 = 50$  Ft. Ha a sorsjegyek ára ennél jóval nagyobb, például 100 Ft, akkor „nem éri meg” vele játszani (pénzügyi szempontból). A szerencsejátékok szervezői természetesen mindig nyereségre törekszenek, ezért a sorsjegy árát úgy szabják meg, hogy összességében a szervező járjon jól. Ez persze nem zárja ki azt, hogy valaki egyetlen játékkal is sokat nyerjen. Éppen ez adja a szerencsejátékok izgalmát, és sajnos éppen ezért okoznak ezek a játékok függőséget is.

### 3. A várható érték számolása



*Megjegyzés*

Amikor elkészítjük a táblázatot a lehetséges kimenetelekkel és azok valószínűségével, akkor érdemes ellenőrizni, hogy a valószínűségek összege 1-et ad-e.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kereskedő sorsjegyjátékot indít. Minden vásárló, aki legalább 10 000 Ft értékben vásárol, kap ajándékba egy sorsjegyet, a készlet erejéig. Négyféle sorsjegyet nyomtatnak. Táblázatba foglaltuk, hogy melyik fajtából hány db készült, és melyiknek mi a szövege.

Sorsjegy szövege	Most nem nyertél, de próbáld meg újra!	Nyertél 500 Ft-ot! Gratulálunk!	Nyertél 2000 Ft-ot! Csak így tovább!	Megütötte a főnyereményt! Nyertél 10 000 Ft-ot!
Hány db van belőle?	9800	180	19	1

Mennyi egy sorsjegy nyereményének a várható értéke?

*Megoldás*

Összesen  $9800 + 180 + 19 + 1 = 10\,000$  sorsjegy készült.

Foglaljuk táblázatba a lehetséges nyereményeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!

Nyeremény	0	500	2 000	10 000
Valószínűség	$\frac{9800}{10\,000} = 0,98$	$\frac{180}{10\,000} = 0,018$	$\frac{19}{10\,000} = 0,0019$	$\frac{1}{10\,000} = 0,0001$

A valószínűségek összege  $0,98 + 0,018 + 0,0019 + 0,0001 = 1$ , vagyis teljes a felsorolás.

A várható értéket megkapjuk, ha a nyeremények értékét összeszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűségekkel, és ezeket összeadjuk – ez nem más, mint a nyeremények valószínűségekkel súlyozott összege.

$$E = 0 \cdot 0,98 + 500 \cdot 0,018 + 2000 \cdot 0,0019 + 10\,000 \cdot 0,0001 = 13,8.$$

A nyeremény várható értéke 13,8 Ft. Átlagosan ennyit fizet ki a bolt a vásárlóknak sorsjegyenként.

## FELADAT

1. 

Angéla és Panni a következő játékot játsszák:

Angéla dob egy szabályos dobókockával. Ha ötöst dob, akkor fizet Panninak 50 forintot. Ha a dobás eredménye nem ötös, akkor kap Pannitól 15 forintot.

a) Figyeld meg az első táblázatot, majd ez alapján töltsd ki a második táblázatot!

Angéla szempontjából

dobás eredménye	ötös	nem ötös
ekkor a „nyeremény”	-50	15
ennek valószínűsége	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Panni szempontjából

dobás eredménye	ötös	nem ötös
ekkor a „nyeremény”		
ennek valószínűsége		

b) Határozd meg Angéla, illetve Panni esetében a „nyeremény” várható értékét!

c) Ez a játék nem igazságos. Mikor neveznél egy játékot igazságosnak? Hogyan lehetne módosítani a „nyereményeket”, hogy a játék igazságos legyen?

2. 

Szabályos dobókockával dobunk. Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján számold ki, mennyi egy dobás várható értéke! Értelmezd a feladat végeredményét! Mit jelent a kapott érték?

Dobás eredménye	1	2	3	4	5	6
Valószínűség						

3. 

Egy iskolai farsangon az iskola mind az 500 tanulója kapott egy-egy tombolaszelvényt. A sorsolásakor 10 tombola számát húzzák ki egy kalapból. A kihúzott szelvény tulajdonosa 1000 Ft-os ajándékutalványt nyer, amit a farsangi büfében költhet el.

a) Mennyi a lehetséges kimenetek valószínűsége? Töltsd ki a táblázatot!

Lehetőség	1000 Ft nyeremény	0 Ft nyeremény
Valószínűsége		

b) Mennyi a nyeremény várható értéke?

4. 

Feldobunk 3 db különböző pénzermét, egy 20 Ft-ost, egy 50 Ft-ost és egy 100 Ft-ost. A lehetséges 8 elemi esemény a következő:

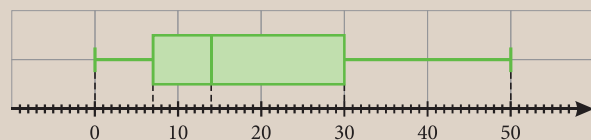
	Fej	Fej	Fej	Fej	Írás	Írás	Írás	Írás
	Fej	Fej	Írás	Írás	Fej	Fej	Írás	Írás
	Fej	Írás	Fej	Írás	Fej	Írás	Fej	Írás

Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján számold ki, hogy 3 érmét feldobva mennyi a fejek számának várható értéke!

Fejek száma	0	1	2	3
Valószínűség				

5

Dobozdiagramon ábráztuk, hogy egy adott hónapban hány perccel hamarabb értek ki az emberek egy kisváros vasúti pályaudvarára, mint a menetrendben kiírt indulási idő.



A következő állítások egy véletlenszerűen kiválasztott adatra vonatkoznak a diagramon ábrázolt adatok közül (egy véletlenszerűen kiválasztott személy egyik alkalommal mennyivel ment ki hamarabb, mint az indulási idő). A diagram alapján dönts el, hogy az állítások igazak, hamisak vagy nem tudjuk megállapítani a logikai értéküket.

	Igaz	Hamis	A diagram alapján nem lehet eldönteni
Legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy az időtartam kisebb, mint 7 perc.			
Legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy az időtartam kisebb, mint 8 perc.			
Legalább 0,5 annak a valószínűsége, hogy az időtartam nagyobb, mint 7 perc és kisebb, mint 30 perc.			
Legalább 0,5 annak a valószínűsége, hogy az időtartam nagyobb, mint 6 perc és kisebb, mint 31 perc.			
Az időtartam várható értéke 40 perc.			
Az időtartam várható értéke egyenlő a mediánnal.			
Az időtartam várható értéke kisebb, mint a medián.			

## HÁZI FELADAT

1

Egy részvény árfolyama 4600 Ft. (Ez azt jelenti, hogy ezen az áron lehet eladni, illetve megvenni ezt a részvényt egy adott napon.) Az elemzők szerint a részvény ára egy év múlva 0,6 valószínűséggel 18%-kal emelkedik, és 0,4 valószínűséggel 5%-kal csökken. Határozd meg a részvény jövő évi árfolyamának várható értékét!

2

Egy nyereményjáték tomboláit mutatja a következő táblázat. Töltsd ki a táblázat alsó sorát, majd határozd meg egy véletlenszerűen kiválasztott szelvény nyereményének várható értékét!

Szelvényen olvasható szöveg	Mekkora pech! Ez most nem nyert.	Ez az apró öröme napja. Nyertél 300 Ft-ot!	Ez király! Nyertél 600 Ft-ot!	Ugye el sem hiszed? Nyertél 1500 Ft-ot!	Érezd magad a felhők között! Nyertél 5000 Ft-ot!
Ennyi db készült belőle	1250	200	40	8	2
Valószínűség					

3

Diagramon ábráztuk, hogy a kompetenciamérés egyik feladatában egy osztály tanulói hány pontot kaptak az elérhető 4 pontból. Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján határozd meg, hogy ha véletlenszerűen választunk egy dolgozatot, akkor mennyi a várható értéke az ebben a feladatban elért pontszámnak!

Pontszám	0	1	2	3	4
Valószínűség					

