

# Függvények. A középiskolás anyag összefoglalása

Barczi Péter küldte be 2025. 09. 08., h - 20:51 időpontban

## **Terv típusa**

Óraterv

## **Szektor**

Gazdálkodás és menedzsment

## **Témakör, tanulási terület**

függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak

## **Évfolyam**

14. évfolyam

## **Tanulási, fejlesztési célok**

A függvény fogalmának pontos megértése és definiálása. • A függő és független változók, az értelmezési tartomány és az értékkészlet azonosítása és meghatározása adott függvények esetén. • A függvények megadási módjainak felismerése és értelmezése.

## **Fogalmak**

• **Függvény:** Az  $y$  mennyiség (függő változó) az  $X$  mennyiség (független változó) függvénye, ha  $X$  bármely szóbajövő értékéhez  $y$ -nak egy vagy több meghatározott értéke tartozik. Jelen kurzuson egyváltozós, valós függvényekkel foglalkozunk.

## **Szükséges eszközök**

• Projektor és vetítővászon / interaktív tábla • Fehér tábla és markerek • Tanári laptop prezentációhoz • Kinyomtatott feladatlapok és elméleti összefoglalók • Számológép (egyes feladatokhoz, ha a számolási rész nem a fő cél)

## **Előre kiadott anyagok**

• Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás című könyvének kivonatai (különösen az I. fejezet: "Függvénytani alapfogalmak").

- A kulcsfogalmak és tulajdonságok rövid összefoglalása.
- Feladatlap a forrásokban szereplő példákból és hasonló típusú feladatokból

## **Bevezető rész, előkészítés**

### **1. Köszöntés, ráhangolás (2 perc):**

- Rövid köszöntés, a mai óra témájának felvezetése.

### **2. Motiváció és a téma fontossága (5 perc):**

- Miért fontosak a függvények a matematikában, fizikában, mérnöki tudományokban? (Pl. mozgások, gazdasági folyamatok leírása).
- Hangsúlyozzuk, hogy a differenciálszámítás alapja a függvények ismerete.
- Utalás a középiskolai előismeretekre mint alapra, amire építünk.

### **3. Óra céljainak áttekintése (3 perc):**

- Vázlatosan bemutatjuk a mai óra menetét, a főbb témaköröket (definíció, tulajdonságok, típusok).

## **Megvalósítás részletes tervezése**

### **Megvalósítás részletes tervezése (70 perc):**

#### **I. Függvény definíciója és alapfogalmak (15 perc)**

##### **• 1. A függvény fogalma (5 perc):**

- **Függvény definíciója:**  $y$  mint  $X$  függvénye, függő és független változó.
- **Értelmezési tartomány és értékkészlet definíciója:** Értékek összessége.
- *Példa:*  $y=x^2$  egyszerű példán szemléltetjük a változókat, Ét. és Ék.

##### **• 2. A függvény megadási módjai (5 perc):**

- Értéktáblázat, grafikon, formula, utasítás (pl.  $P(x)$  prímszámok száma).
- Kiemeljük a formulával megadott függvények fontosságát.

### • 3. Formulával adott függvények alakjai (5 perc):

- **Explicit:**  $y=f(x)$  (pl.  $y=x^2+1$ ).
- **Implicit:**  $F(x,y)=0$  (pl.  $x^2+y^2=r^2$  kör).
- **Paraméteres:**  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  (pl. mozgás leírása).
- *Aktivitás (gyors ellenőrzés):* Mutatunk néhány függvényt, kérdezzük, milyen alakúak, és mi az értelmezési tartományuk néhány egyszerű esetben (pl.  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=1/x$ ).

## II. Függvények speciális tulajdonságai (25 perc)

### • 1. Páros és páratlan függvények (5 perc):

- Definíciók és geometriai jelentés (szimmetria).
- *Példák:*  $y=x^2$ ,  $y=\cos x$  (páros);  $y=x^3$ ,  $y=\sin x$  (páratlan).

### • 2. Periodikus függvények (5 perc):

- Definíció ( $f(x)=f(x+ka)$ ) és a periódus fogalma.
- *Példák:* Szögfüggvények ( $y=\sin x$ ,  $y=\tan x$ ).

### • 3. Korlátos függvények (5 perc):

- Alulról, felülről és korlátos függvények definíciói.
- *Példák:*  $y=x^2$  (alulról),  $y=-x^2$  (felülről),  $y=\sin x$  (korlátos).

### • 4. Monoton függvények (10 perc):

- Monoton növekedő, szigorúan monoton növekedő, monoton csökkenő, szigorúan monoton csökkenő definíciói.
- *Példák:*  $y=x^3$  (szigorúan monoton növekedő),  $y=-x^3$  (szigorúan monoton csökkenő).
- *Aktivitás (csoportmunka):* Adott grafikonokhoz vagy függvényformulákhoz (pl.  $y=x^2$ ,  $y=|x|$ ,  $y=\tan x$ ) állapítsák meg a tulajdonságokat (páros/páratlan, monotonitás intervallumai, korlátosság).

## III. Inverz és összetett függvények (20 perc)

## • 1. Inverz függvénykapcsolat és inverz függvény (10 perc):

- Definíció:  $x=f^{-1}(y)$ .
- Értelmezési tartomány és értékkészlet felcserélődése.
- Változók felcserélése ( $y=f^{-1}(x)$ ) és geometriai jelentés (szimmetria az  $y=x$  egyenesre).
- *Példa:*  $y=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{y}$  (inverz kapcsolat)  $\rightarrow y=\pm\sqrt{x}$  (inverz függvény).
- *Aktivitás:* Adott  $y=5\sqrt{x}$  függvényhez írják fel az inverz függvényt.

## • 2. Összetett függvények (10 perc):

- Definíció: A független változó egy másik függvény függvényértéke ( $y=f(u(x))$ ).
- Függvények rétegekre bontása (belső és külső függvények).
- *Példák:*  $y=\sin(x^2)$ ,  $y=\sin^3(3x)$ .
- *Aktivitás:* Adott összetett függvényeknél (pl.  $y=\lg\sqrt{(2x+1)/\sin x}$ ) bontsák fel a belső és külső függvényekre.

## IV. Elemi függvénytípusok (10 perc)

### • 1. Osztályozás (3 perc):

- Algebrai (racionális egész, racionális tört, algebrai irracionális) és transzcendens függvények.

### • 2. Áttekintés példákkal (7 perc):

- Racionális egész (polinomok: lineáris, másodfokú).
- Racionális törtfüggvények (pl.  $y=a/x$ ).
- Algebrai irracionális függvények (gyökös kifejezések).
- Exponenciális és logaritmusfüggvények.
- Trigonometrikus és inverz trigonometrikus függvények.
- Hiperbolikus és areafüggvények.

◦ *Aktivitás:* Mutatunk néhány formulát, és kérjük a hallgatókat, hogy sorolják be őket a megfelelő kategóriákba.

## Tananyagkészítéshez és az órai munkához használt alkalmazás

ChatGPT

Google NotebookLM

## Értékelési terv

- **Formális értékelés az óra alatt:** Aktív részvétel, kérdésekre adott válaszok, csoportmunka ellenőrzése.
- **Rövid egyéni feladat:** Az óra végén egy-két gyors kérdés az alapvető fogalmakra vagy egy egyszerű értelmezési tartomány meghatározására.
- **Házi feladat (nem számszerűsített):**
  - Önálló feladatmegoldás: Bárczy Barnabás könyvéből (I. fejezet) javasolt feladatok az értelmezési tartomány, értékkeszlet, inverz függvények és függvénytulajdonságok témakörében (pl.).
  - Eredmények összevetése a könyvben található megoldásokkal

## Differenciálás

- **Szemléltetés:** Mindig használjunk vizuális segédleteket (grafikonokat, ábrákat) a fogalmak magyarázatához, hogy segítsük a különböző tanulási stílusú hallgatókat.
- **Példák differenciálása:** Kezdetben egyszerű, egyértelmű példákat mutassunk be, majd fokozatosan térjünk át a komplexebb, több szempontot is igénylő feladatokra (pl. összetett függvények értelmezési tartományai).
- **Ismétlés:** Készüljünk fel arra, hogy a középiskolai anyagot esetleg részletesebben át kell ismételni, mivel a hallgatók előzetes tudása eltérő lehet.
- **Kérdések ösztönzése:** Támogassuk a kérdések feltevését, bátorítsuk a hallgatókat a bizonytalanságok tisztázására.
- **Peer learning:** Ösztönözzük a csoportmunkát, ahol a hallgatók segíthetik egymást a feladatmegoldásban és a fogalmak megértésében.

## Feladatok

- **Értelmezési tartomány és értékészlet meghatározása:**

- $y = 6x^2 - 3x + 2$
- $y = \lg(3 + 2x)$
- $y = \sin x$
- $y = \lg(\sin x)$
- $y = \text{Arcsin}(2 - x)$
- $y = \sqrt{(x - 6)(x + 5)}$

- **Inverz függvény meghatározása:**

- $y = 5\sqrt{x}$
- $y = x/(x - 5)$
- $y = \text{sh}x$

- **Összetett függvény helyettesítési értékének kiszámítása:**

- $y = \sin^3(3x)$ , határozzuk meg az  $x_0 = \pi/6$ -hoz tartozó függvényértéket.

- **Függvénytulajdonságok azonosítása (grafikon vagy formula alapján):**

- Adott függvények (pl.  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = |x|$ ) esetén állapítsák meg, hogy páros, páratlan, periodikus, korlátos-e, valamint a monotonitási intervallumokat.

- **Függvénytípusok osztályozása:**

- Adott függvényformulák (pl.  $y = 3x^4 - 2x + 1$ ,  $y = (x^2 + 1)/(x - 3)$ ,  $y = e^x$ ,  $y = \arcsin x$ ) esetén sorolják be azokat a megfelelő elemi függvénytípusokba.

## **Közismereti tantárgy(ak)**

matematika